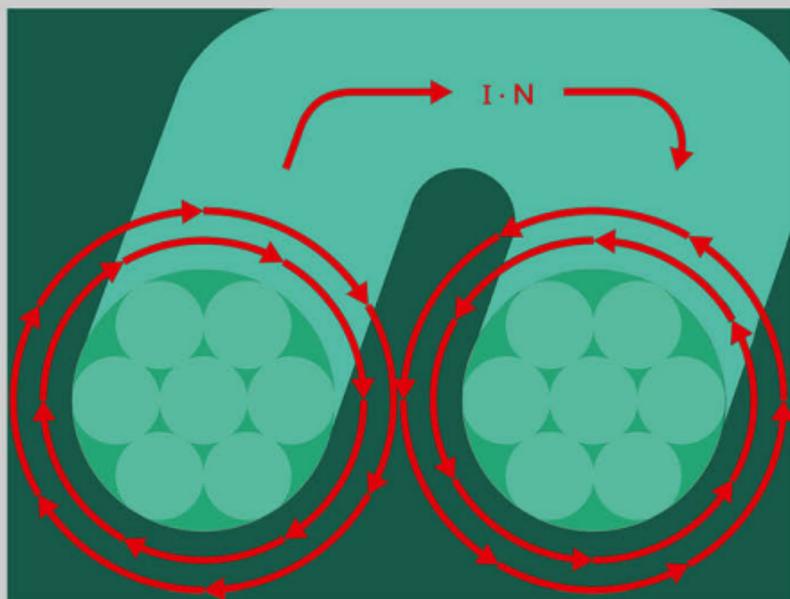


Böttle / Eißner / Friedrichs / Janßen / Wessels

Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

Die Meisterprüfung



Die Meisterprüfung

Mathematische und elektrotechnische Grundlagen

Dipl.-Ing. Peter Böttle

Dipl.-Ing. Andreas Eißner

Dipl.-Ing. Horst Friedrichs

Dipl.-Ing. Thorsten Janßen

Dipl.-Ing. Bernard Wessels

13., überarbeitete Auflage

Vogel Business Media

Weitere Informationen:
www.vbm-fachbuch.de

ISBN 978-3-8343-3405-3

13. Auflage. 2017

Alle Rechte, auch der Übersetzung, vorbehalten.
Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form
(Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen
Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des
Verlages reproduziert oder unter Verwendung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt
oder verbreitet werden. Hiervon sind die in
§§ 53, 54 UrhG ausdrücklich genannten
Ausnahmefälle nicht berührt.

Printed in Germany

Copyright 1976 by Vogel Business Media
GmbH & Co. KG, Würzburg

Vorwort

Dieser Grundlagenband der Fachbuchreihe «*Die Meisterprüfung in der Elektrotechnik*» behandelt alle mathematischen und elektrotechnischen Grundlagen, die ein Elektrotechniker-Meister benötigt, um die fachlichen Zusammenhänge verstehen zu können. Er ist insbesondere für den zukünftigen Meister geschrieben worden und schließt eine Lücke zwischen dem Berufsschul- und dem Fachhochschulniveau.

Um dem Benutzer, dessen Berufsschulzeit einige Jahre zurückliegt, die Einarbeitung zu erleichtern, beginnt der *Grundlagenband* mit den elementaren Kenntnissen der *Mathematik* und der *Elektrotechnik*. Der Leser wird so weit in die elektrotechnischen Grundgesetze eingeführt, dass er sie beherrscht und bei Aufgabenlösungen anwenden kann. Das Buch ist also eine sinnvoll abgerundete Lehreinheit, die unabhängig von anderen Titeln verarbeitet werden kann. Die erreichbaren Lernziele entsprechen jenen Anforderungen, die der *Zentralverband der Elektro- und Informationstechnischen Handwerke (ZVEH)* für den Bereich «*Grundlegende Qualifikationen der Elektrotechnik mit mathematischen Anwendungen*» festgelegt hat.

Da meist projektbezogen unterrichtet wird, hat dieses Buch eine besondere Bedeutung als Nachschlagewerk für die Lehrgangsteilnehmer, die sich auf die Meisterprüfung vorbereiten, aber gleichermaßen auch für die im Berufsleben stehenden Meister und Techniker.

Die vorliegende Form ist das Ergebnis ständiger Erprobungen mit Teilnehmern an Meisterlehrgängen des *Bundestechnologiezentrums für Elektro- und Informationstechnik (BFE Oldenburg)*. Die ausführlichen, häufig mit vierfarbigen Bildern untermauerten Beschreibungen zu einzelnen Themen werden von nach methodischen Gesichtspunkten ausgewählten Rechenbeispielen ergänzt.

Für Lehr- und Übungszwecke sind wertvolle weitere Aufgaben mit Lösungen in dem zu dieser Buchreihe gehörenden Aufgabenband enthalten.

Außerdem gibt es passend zu dem Grundlagenband *Lernsoftware als CDs* und *E-Learning-Angebote* vom *BFE Oldenburg*, die ebenfalls bei Vogel Business Media erschienen sind.

In diesem Band befinden sich hinter den jeweiligen Überschriften Hinweise auf die dazugehörige CD (siehe auch Seite 6).

Die Autoren nehmen jederzeit dankbar Ratschläge zur Verbesserung entgegen.

Oldenburg und Würzburg

Autoren und Verlag

In der Fachbuchreihe «Die Meisterprüfung in der Elektrotechnik» sind bisher erschienen:

Behrends:	Elektrische Maschinen
Behrends / Wessels:	Formeln und Tabellen Elektrotechnik
Böttle / Boy / Clausing:	Elektrische Mess- und Regelungstechnik
Böttle / Eißner / Friedrichs / Janßen / Wessels:	Mathematische und elektrotechnische Grundlagen
Boy / Bruckert / Wessels:	Elektrische Steuerungs- und Antriebstechnik
Boy / Dunkhase:	Elektro-Installationstechnik
Dugge / Eißner:	Grundlagen der Elektronik
Folkerts / Baade:	Hausgeräte-, Beleuchtungs- und Klimatechnik
Janßen / Soboll / Böttle / Friedrichs:	Aufgaben und Lösungen Elektrotechnik
Siegismund:	Werkstoffkunde
Wübbe:	Telekommunikation

Lern-CDs zu diesem Grundlagenband

Bei Vogel Business Media sind vom BFE Oldenburg erstellte Lern-CDs erschienen. Sie lehnen sich stark an die Ausführungen dieses Buches an, geben jedoch zusätzlich per Animation und Sprechertext Erläuterungen, die den Lerneffekt erheblich steigern.

Zu den Inhalten dieses Buches gehören folgende CDs:

 **TM** Grundlagen der technischen Mathematik

 **GR1** Grundlagen der Elektrotechnik 1

 **GR2** Grundlagen der Elektrotechnik 2

 **GR3** Grundlagen der Elektrotechnik 3

 **Mg** Elektromagnetismus

 **EM** Elektrische Maschinen

 **We** Wechselstromtechnik

 **Dr** Drehstromtechnik

 **Bz** Brennstoffzellen

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Allgemeines Rechnen	17
1.1 Rechnen mit Zahlen und Buchstaben	17
1.1.1 Begriffe, Zahlenarten	17
1.1.2 Zahlen mit Vorzeichen	17
1.1.3 Rechenstufen	18
1.1.4 Mehrfachklammern	20
1.2 Grundrechenarten	20
1.2.1 Addieren (Zusammenzählen) und Subtrahieren (Abziehen)	20
1.2.2 Multiplizieren (Malnehmen)	21
1.2.3 Dividieren (Teilen)	22
1.2.4 Bruchrechnen	23
<i>Addieren und Subtrahieren von Brüchen</i>	24
<i>Multiplizieren von Brüchen</i>	25
<i>Dividieren von Brüchen</i>	25
1.2.5 Dezimalbrüche und gemeine Brüche	26
1.2.6 Auf- und Abrunden von Ergebnissen	26
1.3 Dreisatzrechnung – Prozentrechnung	27
1.3.1 Dreisatzrechnung (Schlussrechnung)	27
<i>Proportionaler Dreisatz</i>	27
<i>Umgekehrt proportionaler Dreisatz</i>	28
<i>Doppelter Dreisatz</i>	29
1.3.2 Prozentrechnung	29
1.4 Rechnen mit Klammern	31
1.4.1 Klammern ausmultiplizieren (Klammern auflösen)	31
1.4.2 Ausklammern (Klammer setzen)	34
1.5 Potenzen – Wurzeln	35
1.5.1 Potenzen	35
<i>Sonderfälle der Potenzrechnung</i>	35
<i>Potenzieren von Potenzen</i>	37
<i>Zehnerpotenzen</i>	38
1.5.2 Wurzeln	39
<i>Sonderfälle beim Rechnen mit Wurzeln</i>	40
1.6 Anwendung aller Rechenstufen in Formeln aus der Elektrotechnik	42
1.7 Gleichungen	46
1.7.1 Gleichungen, die nur eine Rechenstufe enthalten	46
1.7.2 Gleichungen, die mehrere Rechenstufen enthalten	48
1.7.3 Gleichungen, die die unbekannte Größe mehr als einmal enthalten	51
1.7.4 Gleichungen mit mehreren Unbekannten	52
1.8 Rechtwinkliges Dreieck	56

1.8.1	Satz des PYTHAGORAS	56
1.8.2	Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)	58
	<i>Darstellung der Sinusfunktion in einem Liniendiagramm</i>	61
2	Darstellungen im Koordinatensystem	63
2.1	Koordinatensysteme	63
2.1.1	Rechtwinkliges Koordinatensystem	63
2.1.2	Polarkoordinatensystem	65
2.2	Lineares Verhalten	65
2.3	Umgekehrtes (reziprokes) Verhalten	68
2.4	Quadratisches Verhalten	69
2.5	Logarithmische Darstellung	71
2.5.1	Teilung einer logarithmischen Skala	71
2.5.2	Logarithmische Koordinaten	71
3	Technisches Rechnen	77
3.1	Vorsätze von Einheiten	77
3.1.1	Umrechnungen zwischen Einheiten mit verschiedenen Vorsätzen	77
3.2	Flächen- und Körperberechnungen	79
3.2.1	Flächenberechnungen	79
3.2.2	Körperberechnungen (Rauminhalt – Volumen)	81
3.3	Berechnung von Spulen	82
3.3.1	Berechnung der Drahtlänge	84
3.4	Geschwindigkeit und Beschleunigung	85
3.4.1	Geschwindigkeit	85
3.4.2	Beschleunigung	86
3.4.3	Umfangsgeschwindigkeit	87
3.4.4	Winkelangabe in Grad oder Bogenmaß	88
3.4.5	Winkelgeschwindigkeit	89
3.5	Riemen- und Zahnradübersetzungen	91
3.5.1	Riementrieb	91
3.5.2	Zahnradtrieb	92
3.5.3	Schneckentrieb	94
3.6	Masse, Gewichtskraft, Kraft	95
3.6.1	Masse – Dichte; Gewichtskraft – Wichte	97
3.7	Kraft, Kräfte-diagramm	99
3.8	Drehmoment; Hebelgesetz	104
4	Grundbegriffe der Physik und Chemie	109
4.1	Arbeitsmethoden der Physik – Maßsysteme	109
4.2	Arbeitsmethoden der Chemie	112
4.3	Aufbau der Materie	113
4.3.1	Atom und Molekül	113
4.3.2	Zustandsformen der Materie	114
4.3.3	Kohäsion und Adhäsion	115
4.3.4	Atommodell	116
4.3.5	Periodisches System der chemischen Elemente	118

4.3.6	Chemische Bindungsarten	120
	<i>Ionenbindung</i>	120
	<i>Atombindung</i>	122
	<i>Metallbindung</i>	124
4.4	Grundlagen der Elektrizitätslehre	125
4.4.1	Einige Daten aus der Geschichte der Elektrizitätslehre	125
4.4.2	Elektrische Ladung	126
4.4.3	Elektrische Spannung und Potential	126
4.4.4	Elektrischer Strom und Ladung	129
4.4.5	Stromrichtung im elektrischen Stromkreis	131
4.4.6	Arten der Leitung des elektrischen Stromes	132
4.4.7	Stromdichte	132
4.4.8	Physikalische Wirkungen des elektrischen Stromes	133
	<i>Wärmewirkung des elektrischen Stromes</i>	133
	<i>Lichtwirkung des elektrischen Stromes – Elektrolumineszenz</i>	134
	<i>Magnetische Wirkung des elektrischen Stromes</i>	134
4.4.9	Erzeugung elektrischer Spannungen	134
	<i>Elektromagnetische Induktion</i>	135
	<i>Galvanische Spannungserzeugung</i>	135
	<i>Thermoelektrische Spannungserzeugung</i>	135
	<i>Piezoelektrizität</i>	137
	<i>Fotoelektrizität</i>	138
	<i>Berührungs- oder Reibungselektrizität</i>	140
5	Elektrochemie	141
5.1	Grundlagen der Elektrolyse	141
5.1.1	Elektrolyte	141
5.1.2	Elektrolytische Dissoziation	143
5.1.3	Elektrolyse	144
5.1.4	Elektrochemisches Äquivalent	146
5.2	Anwendung der Elektrolyse	149
5.2.1	Galvanostegie	149
5.2.2	Galvanoplastik	150
5.2.3	Metallreinigung durch Elektrolyse	150
5.2.4	Metallgewinnung durch Schmelzflusselektrolyse	151
5.2.5	Eloxieren	152
5.3	Grundlagen der galvanischen Spannungserzeugung	153
5.3.1	Chemischer Lösungsdruck	153
5.3.2	Elektrochemische Spannungsreihe	154
5.3.3	Volta-Element	155
5.4	Bauformen und Eigenschaften galvanischer Elemente	156
5.4.1	Abmessungen von Primärelementen	156
5.4.2	Kapazität und Lebensdauer von Primärelementen	157
5.4.3	Braunsteinelement (Leclanché-Element)	157
5.4.4	Alkali-Mangan-Zelle	158
5.4.5	Quecksilberoxidzelle	159
5.4.6	Silberoxidzelle	160

5.4.7	Lithiumzelle	160
5.4.8	Zink-Luft-Zelle	161
5.4.9	Füllelement	161
5.5	Brennstoffzellen	161
5.6	Akkumulatoren	163
5.6.1	Kapazität und Wirkungsgrad eines Akkumulators	163
5.6.2	Bleiakkumulatoren	165
	<i>Vorgänge bei der Entladung</i>	165
	<i>Vorgänge bei der Ladung</i>	166
	<i>Bauformen</i>	167
	<i>Wartung</i>	170
	<i>Wartungsfreie Bleiakkumulatoren</i>	171
	<i>Ladung von Bleiakkumulatoren</i>	172
5.6.3	Nickel-Cadmium-Akkumulatoren	173
	<i>Wartung von Stahlakkumulatoren</i>	174
	<i>Ladung von Ni-Cd-Akkumulatoren</i>	175
5.6.4	Nickel-Metallhydrid-Akkumulator	177
5.6.5	Wieder aufladbare Alkali-Mangan-Zelle	178
5.6.6	Lithium-Ionen-Akkumulator	179
5.6.7	Batteriegelsetz	180
5.6.8	Kennlinien der Ladegeräte	180
5.7	Korrosion und Korrosionsschutz	181
5.7.1	Chemische Korrosion	181
5.7.2	Elektrochemische Korrosion	181
	<i>Elektrochemische Korrosion durch Elementbildung</i>	182
	<i>Streustromkorrosion</i>	183
5.7.3	Korrosionsschutz	183
	<i>Oberflächenschutz</i>	183
	<i>Konstruktive Maßnahmen gegen Kontaktkorrosion</i>	184
	<i>Konstruktive Maßnahmen gegen Streustromkorrosion</i>	184
	<i>Schutzströme gegen Korrosion im Erdreich oder Wasser</i>	185
6	Elektrischer Widerstand und Schaltungen mit Widerständen	187
6.1	Elektrischer Widerstand	187
6.1.1	Ohmsches Gesetz	187
6.1.2	Elektrischer Leitwert	188
6.1.3	Widerstandskennlinie	190
6.1.4	Nichtlineare Widerstände	192
6.2	Widerstand und Material	195
6.2.1	Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit	195
6.2.2	Widerstands- und Leiterwerkstoffe	198
6.2.3	Belastbarkeit elektrischer Leiter	199
6.3	Veränderlichkeit des elektrischen Widerstandes	200
6.3.1	Zug- und Druckabhängigkeit des Widerstandes	201
6.3.2	Temperaturabhängigkeit des Widerstandes	201
6.3.3	Lichtabhängigkeit des Widerstandes	202
6.3.4	Magnetfeldabhängigkeit des Widerstandes	202

6.3.5	Spannungsabhängigkeit des Widerstandes	202
6.3.6	Temperaturbeiwert	202
6.3.7	Supraleitung	205
6.4	Grundsaltungen von Widerständen	205
6.4.1	Kirchhoffsche Gesetze	205
6.4.2	Reihenschaltung von Widerständen	210
	<i>Regeln der Reihenschaltung</i>	210
	<i>Unbelasteter Spannungsteiler</i>	214
	<i>Reihenschaltung mit einem nichtlinearen Widerstand</i>	217
6.4.3	Parallelschaltung von Widerständen	218
	<i>Regeln der Parallelschaltung</i>	218
	<i>Beispiele mit Parallelschaltungen</i>	221
6.4.4	Gemischte Schaltungen aus linearen Widerständen	223
6.5	Spannungsquellen	226
6.5.1	Ersatzschaltbild einer Spannungsquelle	226
6.5.2	Spannungsquellen mit nichtlinearem Verhalten	230
6.5.3	Reihenschaltung von Spannungsquellen	231
6.5.4	Parallelschaltung von Spannungsquellen	232
6.5.5	Reihen- und Parallelschaltung von Spannungsquellen	234
6.6	Belasteter Spannungsteiler	235
6.6.1	Einbeziehung des Lastwiderstandes in den Spannungsteiler	236
6.6.2	Belasteter Spannungsteiler als Spannungsquelle	238
6.6.3	Einstellbarer Spannungsteiler	241
6.7	Wheatstone-Brückenschaltung	244
6.7.1	Die abgegliche Wheatstone-Brückenschaltung	244
6.7.2	Die unabgegliche Wheatstone-Brückenschaltung	247
6.7.3	Unabgegliche Brückenschaltung mit belastetem Diagonalzweig	249
6.7.4	Ersatzwiderstand einer Brückenschaltung	250
6.8	Widerstandsbauelemente	253
6.8.1	Lineare Festwiderstände	253
	<i>Staffelung der Nennwerte</i>	253
	<i>Kennzeichnung von Festwiderständen</i>	254
	<i>Belastbarkeit von Widerständen</i>	255
	<i>Bauformen von Festwiderständen</i>	256
6.8.2	Verstellbare Widerstände	259
	<i>Widerstandskurven von Potentiometern</i>	259
	<i>Drahtpotentiometer</i>	260
	<i>Schichtpotentiometer</i>	262
6.9	Temperaturabhängige Widerstände	262
6.9.1	Heißleiter oder NTC-Widerstände	262
	<i>Aufbau und Eigenschaften von Heißleitern</i>	262
	<i>Anwendung von NTC-Widerständen</i>	265
6.9.2	Kaltleiter oder PTC-Widerstände	267
	<i>Aufbau und Eigenschaften von PTC-Widerständen</i>	267
	<i>Anwendung von PTC-Widerständen</i>	269
6.10	Spannungsabhängige Widerstände oder Varistoren	269

7	Arbeit, Leistung, Energie	271
7.1	Begriff der Arbeit in der Mechanik	271
7.2	Energie und Energieformen	276
7.2.1	Mechanische Energie	273
	<i>Potentielle Energie</i>	273
	<i>Kinetische Energie</i>	273
7.2.2	Elektrische Energie	275
7.2.3	Wärmeenergie	278
7.2.4	Chemische Energie	278
7.2.5	Atomenergie	279
7.2.6	Umrechnung von Energieeinheiten	280
7.3	Leistung	282
7.3.1	Mechanische Leistung	282
7.3.2	Elektrische Leistung	284
7.3.3	Leistung und Widerstand	286
7.3.4	Umrechnung von Leistungseinheiten	289
7.3.5	Messung der elektrischen Leistung	291
7.3.6	Leistungsminderung durch Vorwiderstand	292
7.3.7	Leistung an einer pulsierenden Gleichspannung	293
7.3.8	Wirkungsgrad	295
7.3.9	Elektrische Anpassung	298
7.3.10	Pegelrechnung	301
7.4	Wärmelehre	305
7.4.1	Temperatur	305
7.4.2	Temperaturmessung	306
7.4.3	Wärmemenge	307
7.4.4	Mischungsregel	310
7.4.5	Umwandlung in anderen Aggregatzustand	313
7.4.6	Ausbreitung der Wärme	315
	<i>Wärmeleitung</i>	315
	<i>Wärmeströmung oder -konvektion</i>	316
	<i>Wärmestrahlung</i>	317
8	Elektrisches Feld und Kondensator	319
8.1	Gesetze des elektrischen Feldes	319
8.2	Durchschlagsfestigkeit	322
8.3	Elektrostatische Influenz und Polarisierung	324
8.3.1	Influenz	324
8.3.2	Polarisierung	325
8.4	Kondensator	327
8.4.1	Kapazität des Kondensators	327
8.4.2	Energie eines geladenen Kondensators	330
8.4.3	Schaltungen von Kondensatoren	331
8.5	Kondensator im Gleichstromkreis	333
8.5.1	Ladung und Entladung eines Kondensators mit konstantem Strom	334
8.5.2	Ladung und Entladung eines Kondensators an konstanter Spannung	336
8.5.3	Kapazitätsbestimmung durch Zeitmessung	340

8.5.4	Aufladung eines Kondensators mit parallel geschaltetem Widerstand	341
8.6	Widerstand und Kondensator als Integrier- und Differenzierglied	342
8.6.1	RC-Glied als Integrierglied	343
8.6.2	CR-Glied als Differenzierglied	344
8.7	Bauformen und Eigenschaften von Kondensatoren	346
8.7.1	Einteilung von Kondensatoren	346
8.7.2	Eigenschaften von Festkondensatoren	346
8.7.3	Kennzeichnung von Kondensatoren	348
8.7.4	Aufbau von Kondensatoren	349
	<i>Wickelkondensatoren</i>	349
	<i>Vielschichtkondensatoren</i>	352
	<i>Keramikmassekondensatoren</i>	353
8.7.5	Elektrolytkondensatoren (Elkos)	354
	<i>Aluminium-Elektrolytkondensatoren</i>	354
	<i>Tantal-Elektrolytkondensatoren</i>	355
8.7.6	Verstellbare Kondensatoren	356
	<i>Drehkondensator</i>	356
	<i>Trimmerkondensatoren</i>	356
8.7.7	Gold-Cap-Kondensatoren	357
9	Magnetisches Feld	359
9.1	Grundbegriffe	359
9.1.1	Historisches	359
9.1.2	Entstehung der magnetischen Wirkung	359
9.1.3	Magnetische Abschirmung	362
9.1.4	Wirkung magnetischer Pole	362
9.2	Magnetischer Kreis	363
9.2.1	Magnetischer Fluss	364
9.2.2	Flussdichte – Induktion	364
9.2.3	Durchflutung	365
9.2.4	Magnetischer/Elektrischer Spannungsfall	366
9.2.5	Magnetischer/Elektrischer Widerstand	367
9.2.6	Magnetischer/Elektrischer Leitwert	369
9.2.7	Magnetische/Elektrische Feldstärke	370
9.3	Ferromagnetische Materialien	375
9.3.1	Größen der Magnetisierungskennlinien	375
	<i>Remanenz</i>	375
	<i>Hysteresisverluste</i>	376
	<i>Entmagnetisierung</i>	378
9.3.2	Hartmagnetische Werkstoffe	379
	<i>Hartferrit-Magneten</i>	379
	<i>Seltenerd-Magneten</i>	380
	<i>Metallische Dauermagnete</i>	381
	<i>Magnetisierungsarten</i>	381
	<i>Aufmagnetisierung von Dauermagneten</i>	382
9.3.3	Weichmagnetische Bauelemente	383
	<i>Kerne aus einzelnen Blechen</i>	383

	<i>Bandkerne</i>	384
	<i>Schnittbandkerne</i>	384
	<i>Pulverkerne</i>	384
	<i>Ferritkerne</i>	385
9.4	Elektromagnete	385
9.4.1	Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	385
9.4.2	Magnetfeld in einer Spule	386
9.4.3	Eisen im Magnetkreis	387
9.4.4	Anwendungen von Elektromagneten	387
9.4.5	Kraftwirkung zweier Magnetpole	388
9.4.6	Kraftwirkung zwischen zwei stromführenden Leitern	389
9.4.7	Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld	391
9.4.8	Kraftwirkung auf eine stromdurchflossene Spule im Magnetfeld	393
9.5	Elektromagnetische Induktion	394
9.5.1	Lenzsches Gesetz	399
9.5.2	Selbstinduktion und Induktivität	399
9.5.3	Induktivität von Spulen	401
9.5.4	Schaltzeichen und Ersatzschaltbild einer Spule	402
9.5.5	Spule im Gleichstromkreis	402
	<i>Einschaltvorgang an einer Spule</i>	403
	<i>Abschaltvorgang an einer Spule</i>	404
9.6	Wirbelströme	405
9.6.1	Stromverdrängung – Skineneffekt	406
10	Wechselstromtechnik	407
10.1	Begriffe	407
10.1.1	Warum ist die Wechselspannung sinusförmig?	407
10.1.2	Periode – Periodendauer	410
10.1.3	Frequenz – Polpaarzahl – Drehzahl	411
10.1.4	Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz	412
10.1.5	Winkel – Bogenmaß – Zeit im Liniendiagramm	413
	<i>Angabe des Winkels α</i>	413
	<i>Angabe des Bogenmaßes $\omega \cdot t$</i>	414
	<i>Angabe der Zeit bei vorgegebener Frequenz</i>	414
10.1.6	Zeiger- und Liniendiagramm	415
10.1.7	Phasenverschiebung im Zeiger- und Liniendiagramm	416
10.1.8	Scheitelwert – Mittelwert – Effektivwert	418
10.1.9	Leistung im Wechselstromkreis	421
	<i>Leistung (Wirkleistung)</i>	422
	<i>Blindleistung</i>	422
	<i>Scheinleistung</i>	423
	<i>Leistungsdreieck</i>	424
10.2	Ohmscher Widerstand (Wirkwiderstand) im Wechselstromkreis	425
10.3	Induktiver Widerstand	427
10.3.1	Phasenverschiebung und Berechnung des Blindwiderstandes	427
10.3.2	Schaltungen mit induktiven Widerständen	430
10.3.3	Reihenschaltung aus R und X_L (Spule)	430

10.3.4	Parallelschaltung von R und X_L	437
10.3.5	Verluste in Spulen bei Wechselstrom	443
	<i>Verlustfaktor und Gütefaktor</i>	443
10.4	Kapazitiver Widerstand	445
10.4.1	Phasenverschiebung und Berechnung des Blindwiderstandes	445
10.4.2	Reihenschaltung R und X_C	448
10.4.3	Parallelschaltung aus R und X_C	453
10.4.4	Verluste im Kondensator	455
	<i>Verlustfaktor und Gütefaktor</i>	456
10.5	Kombinierte Wechselstromschaltungen	458
10.5.1	Schaltungen mit nur induktiven bzw. nur kapazitiven Widerständen	458
10.5.2	Reihenschaltung induktiv-ohmscher Verbraucher	461
10.5.3	Reihenschaltung von mehreren R und C	466
10.5.4	Parallelschaltung induktiv-ohmscher Verbraucher	467
10.5.5	Parallelschaltung mehrerer kapazitiver und ohmscher Verbraucher	473
10.5.6	Schwingkreise	475
	<i>Reihenschwingkreis</i>	475
	<i>Parallelschwingkreis</i>	482
	<i>Vergleich zwischen einem mechanischen Schwingkreis und einem elektrischen Schwingkreis</i>	488
	<i>Widerstandsverlauf eines Schwingkreises in Abhängigkeit von der Frequenz</i>	492
	<i>Bandbreite und Güte</i>	493
10.5.7	Blindleistungskompensation	497
10.6	Passive Vierpole	501
10.6.1	Phasenschieber	501
10.6.2	Filterschaltungen	504
10.6.3	Siebglieder	511
10.6.4	Frequenzkompensierter Spannungsteiler	512
11	Dreiphasenwechselstrom – Drehstrom	515
11.1	Phasenlage und Verkettung	515
11.1.1	Generator in Sternschaltung (Y -Schaltung)	515
11.1.2	Generator in Dreieckschaltung (Δ -Schaltung)	519
11.2	Drehstromverbraucherschaltungen (unsymmetrisch)	520
11.2.1	Sternschaltung (unsymmetrisch)	520
11.2.2	Dreieckschaltung (unsymmetrisch)	524
11.2.3	Leistungen im Drehstromsystem bei unsymmetrischer Last	526
11.3	Symmetrische Drehstromverbraucherschaltungen	527
11.3.1	Symmetrische Sternschaltung	527
11.3.2	Symmetrische Dreieckschaltung	531
11.3.3	Stern-Dreieck-Schaltung	533
11.3.4	Störungen bei symmetrischen Schaltungen	538
	<i>Störungen bei symmetrischen Sternschaltungen</i>	538
	<i>Störungen bei symmetrischen Dreieckschaltungen</i>	540
	<i>Zusammenfassung</i>	542
11.3.5	Unterbrechung des N-Leiters bei unsymmetrischer Belastung	543

11.4	Blindleistungskompensation im Drehstromnetz	543
11.4.1	Berechnungsverfahren	550
11.4.2	Kompensationsarten	550
12	Grundlagen der Leitungsberechnung	551
12.1	Kriterien der Leitungsberechnung	551
12.2	Leitungsauswahl nach mechanischer Festigkeit	551
12.3	Strombelastbarkeit von Leitungen	552
12.4	Spannungsfall auf elektrischen Leitungen	553
12.4.1	Bestimmungen über die Höhe des zulässigen Spannungsfalls	553
12.4.2	Berechnung des Spannungsfalls auf Leitungen	554
	<i>Spannungsfall bei Gleichstrom</i>	554
	<i>Spannungsfall bei Wechselstrom</i>	556
	<i>Spannungsfall bei Drehstrom</i>	559
12.4.3	Leitungen mit Abzweigen	560
	<i>Leitungen mit Abzweigen bei Wechselstrom</i>	561
	<i>Leitungen mit Abzweigen bei Drehstrom</i>	565
12.4.4	Ringleitung	567
12.4.5	Zusammenfassung der Formeln für die Leitungsberechnung nach Spannungsfall	570
12.5	Leistungsverlust auf elektrischen Leitungen	571
13	Vierpole	573
13.1	Übertragungsverhalten von Vierpolen	573
	Verzeichnis der Tabellen	574
	Stichwortverzeichnis	575

1 Allgemeines Rechnen

1.1 Rechnen mit Zahlen und Buchstaben

1.1.1 Begriffe, Zahlenarten

(Mathematische Zeichen siehe Tabelle 1.1)

Natürliche Zahlen	1; 2; 3; 4; ...
Gebrochene Zahlen	
Echte Brüche	$\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{5}{24}; \dots$
Unechte Brüche	$\frac{4}{3}; \frac{7}{4}; \frac{12}{5}; \dots$
Unechte Brüche lassen sich in gemischte Zahlen verwandeln	$\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}; \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}; \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$
Dezimalbrüche	0,6; 0,52; 0,389; ...
Dezimalbrüche als gemischte Zahlen	3,72; 5,67; 4,83
Allgemeine Zahlen	$a; b; l; k; x; \dots$
Benannte Zahlen	5 km; 6 A; 7 V; 4 cm; ...

1.1.2 Zahlen mit Vorzeichen

Vom Thermometer ist Bild 1.1 bekannt. In der Mathematik wird die gleiche Skala durch einen Zahlenstrahl dargestellt (Bild 1.2).

Dabei wird meistens bei den positiven Werten das Pluszeichen fortgelassen. Man unterscheidet also *positive* Zahlen und *negative* Zahlen.

Bild 1.1 Thermometerskala

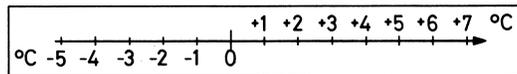


Bild 1.2 Zahlenstrahl

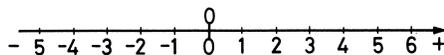


Tabelle 1.1 Mathematische Zeichen

Zeichen	Bedeutung – Sprechweise	
1. Ordnungszeichen		
1.	erstens	
...	und so weiter	
r_1, r_2, \dots, r_n	r – eins; r – zwei; r – n	
2. Gleichheit; Ungleichheit		
=	gleich	
\neq	nicht gleich; ungleich	
\sim	verhältnismäßig; proportional	
\approx	angenähert gleich; etwa; rund	
\triangleq	entspricht	
<	kleiner als	
>	größer als	
\ll	klein gegen; erheblich kleiner als	
\gg	groß gegen; erheblich größer als	
3. Rechenvorgänge		
+	plus	
-	minus	
·	mal	
—	geteilt durch (gerader Bruchstrich)	
%	Prozent (geteilt durch hundert)	
‰	Promille (geteilt durch tausend)	
{ () }	spitze, eckige, runde Klammer	
$\sqrt{\quad}$	Quadratwurzel aus;	
$\sqrt{\quad}$	zweite Wurzel aus	
Σ	Summe	Werte, für die eines dieser Zeichen gilt, sind in Klammern zu setzen!
Δ	Differenz	
Π	Produkt	
∞	unendlich	
4. Geometrische Zeichen		
	parallel	
\nparallel	nicht parallel	
\perp	senkrecht auf	
\sphericalangle	Winkel	
L	rechter Winkel	
\overline{AB}	Strecke von A nach B	
\widehat{AB}	Bogen von A nach B	
arc α	Bogen zum Winkel α ; arcus α	

1.1.3 Rechenstufen

1. Rechenstufe: Addieren (Zusammenzählen)

$$4 + 5; \quad x + y;$$

Subtrahieren (Abziehen)

$$6 - 2; \quad a - b;$$

2. Rechenstufe: Multiplizieren (Malnehmen)

$$5 \cdot 7; \quad a \cdot b$$

Dividieren (Teilen)

$$9 : 4; \quad c : b \quad \text{oder} \quad \frac{9}{4}; \quad \frac{c}{b}$$

3. Rechenstufe: Potenzieren

(gleiche Zahlen malnehmen)

$$4^2; \quad b^3$$

Radizieren (Wurzelziehen)

$$\sqrt[2]{9}; \quad \sqrt[3]{b}$$

Logarithmieren

$${}^2\log 3; \quad {}^{10}\log 3$$

(Nach DIN 1302 jetzt $\log_2 3$)

Diese Rechenstufen haben zueinander eine unterschiedliche Rangfolge. Enthält eine Aufgabe mehrere Stufen, so ist stets die Rechnung der höheren Rechenstufe vorrangig, d.h. zuerst auszuführen.

Verbreitet ist die Merkregel:

Potenzrechnung vor Punktrechnung

d.h. Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren vor Multiplizieren (·) und Dividieren (:).

Punktrechnung vor Strichrechnung

d.h. Multiplizieren (·) und Dividieren (:) vor Addieren (+) und Subtrahieren (-).

Soll dieser Grundsatz aufgehoben werden, setzt man eine Klammer. Zuerst wird dann der Wert in der Klammer berechnet. Ein Bruchstrich hat die gleiche Wirkung wie eine Klammer.

Beispiele zu den Rechenstufen:

$3 \cdot 4 + 5 =$	aber	$3 \cdot (4 + 5) =$
$12 + 5 = \underline{17}$		$3 \cdot 9 = \underline{27}$
$6 + 4 \cdot 7$	aber	$(6 + 4) \cdot 7 =$
$6 + 28 = \underline{34}$		$10 \cdot 7 = \underline{70}$
$6 \cdot 5^2 =$	aber	$(6 \cdot 5)^2 =$
$6 \cdot 25 = \underline{150}$		$30^2 = \underline{900}$
$3^2 \cdot 4 =$	aber	$(3 \cdot 4)^2 =$
$9 \cdot 4 = \underline{36}$		$12^2 = \underline{144}$
$6 + 4^2 =$	aber	$(4 + 6)^2 =$
$6 + 16 = \underline{22}$		$10^2 = \underline{100}$
$- =$	aber	$\frac{4 + 3}{2} =$
$2 + 3 = \underline{5}$		$\frac{7}{2} = \underline{3,5}$
$\frac{120}{3} + \frac{120}{5} =$	aber	$\frac{120}{3 + 5} =$
$40 + 24 = \underline{64}$		$\frac{120}{8} = \underline{15}$

Enthält eine Aufgabe alle 3 Rechenstufen, muss stets mit der höchsten Stufe (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren) begonnen werden.

$$\begin{aligned}
 6 + 3 \cdot 4^2 &= \\
 6 + 3 \cdot 16 &= \\
 6 + 48 &= \underline{54}
 \end{aligned}$$

Falls die Aufgabe in einer anderen Reihenfolge gelöst werden soll, sind Klammern zu setzen.

$$\begin{aligned}
 (6 + 3) \cdot 4^2 &= & \text{oder} & & 6 + (3 \cdot 4)^2 &= \\
 9 \cdot 4^2 &= & & & 6 + 12^2 &= \\
 9 \cdot 16 &= \underline{144} & & & 6 + 144 &= \underline{150}
 \end{aligned}$$

Die drei letzten Beispiele zeigen deutlich, wie unterschiedlich das Ergebnis ausfallen kann.

Zur Festigung der Kenntnisse befindet sich nach der Behandlung der Grundrechenarten, jedoch vor Abschnitt 1.7 «Gleichungen» der Abschnitt 1.6 «Anwendung aller Rechenstufen in Formeln der Elektrotechnik».

1.1.4 Mehrfachklammern

In einigen Fällen sollen die Wirkungen mehrerer Rechenstufen durch Klammern verändert werden. Dann müssen mehrere Klammern gesetzt werden.

$$\begin{aligned}5 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 &= \\5 + 6 + 6 \cdot 4 &= \\5 + 6 + 24 &= \underline{35}\end{aligned}$$

aber: $[(4 + 3) \cdot (2 + 6) \cdot 2]^2 =$ Zunächst werden die inneren Klammern gelöst;
 $[7 \cdot 8 \cdot 2]^2 =$ jetzt wird die eckige Klammer zusammengefasst.
 $112^2 = \underline{12.544}$

Zusätzlich zur eckigen Klammer verwendet man auch die geschweifte Klammer:

$$\begin{aligned}\{[(4 + 2) \cdot 3 + 4] \cdot 3\}^2 &= \\ \{[6 \cdot 3 + 4] \cdot 3\}^2 &= \\ \{[18 + 4] \cdot 3\}^2 &= \\ \{22 \cdot 3\}^2 &= \\ 66^2 &= \underline{4356}\end{aligned}$$

Es wird stets die innere Klammer zuerst gelöst.

1.2 Grundrechenarten

1.2.1 Addieren (Zusammenzählen) und Subtrahieren (Abziehen)

$$\text{Summand} + \text{Summand} = \text{Summe}$$

$$\text{Minuend} - \text{Subtrahend} = \text{Differenz}$$

Die Reihenfolge der Summanden bei der Addition ist gleichgültig.

$$2 + 4 + 6 = 12 \quad \text{oder} \quad 6 + 2 + 4 = 12$$

Es dürfen nur *gleichartige Mengen* zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}2 \text{ V} + 3 \text{ V} &= 5 \text{ V} \\7 \text{ A} + 5 \text{ A} &= 12 \text{ A} \\6 \text{ km} - 2 \text{ km} &= 4 \text{ km}\end{aligned}$$

~~$$\begin{aligned}3 \text{ V} + 7 \text{ A} &= \\ &\text{nicht möglich!}\end{aligned}$$~~

Sind natürliche und allgemeine Zahlen enthalten, gilt entsprechend:

$$5a + 3a = 8a$$

$$7b - 4b = 3b$$

$$6b + 3a + 2b + 4a =$$

$$3a + 4a + 6b + 2b = \underline{7a + 8b}$$

|ordnen

|zusammenfassen

Das ist das Ergebnis. Weiter lässt sich die letzte Aufgabe nicht vereinfachen.

Die folgenden Aufgaben enthalten negative Zahlen.

$$\begin{aligned} +20 - 50 &= -30 \\ -30 + 40 &= +10 \\ -10 - 20 &= -30 \end{aligned}$$

Die positiven Vorzeichen können fortgelassen werden.

	$50 - 40 = 10$	
	$50 + (-30) =$	z.B. 50 € Guthaben + 30 € Schulden
	$50 - 30 = \underline{20}$	= 20 € Guthaben
aber:	$-50 - (-30) =$	z.B. 50 € Schulden - 30 € Schulden
	$-50 + 30 = \underline{-20}$	= 20 € Schulden

Wird eine «Plusklammer» aufgelöst, entfallen die Klammer und ihr Vorzeichen.

$$6 + (-7) = 6 - 7 = \underline{-1}$$

Wird eine «Minuskammer» aufgelöst, erhalten ihre Glieder entgegengesetzte Rechenzeichen.

$$6 - (-7) = 6 + 7 = \underline{13}$$

1.2.2 Multiplizieren (Malnehmen)

Faktor · Faktor = *Produkt*

Die Reihenfolge der Faktoren ist gleichgültig.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5 = 20 \quad \text{oder} \quad 5 \cdot 4 = 20; \quad 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42 \\ a \cdot b = b \cdot a \end{aligned}$$

Zwischen einer natürlichen und allgemeinen Zahl und zwischen allgemeinen Zahlen kann man das Malzeichen fortlassen, da eine Verwechslung nicht möglich ist,

$$3 \cdot a = 3a \qquad 4 \cdot b \cdot c = 4bc$$

ebenfalls vor einer Klammer,

$$3 \cdot (4 + 2) = 3(4 + 2) \qquad 2 \cdot a \cdot (2 + 6) = 2a(2 + 6)$$

jedoch *nicht* zwischen natürlichen Zahlen.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 &\neq 23 \\ 6 &\neq 20 + 3 \end{aligned} \qquad \neq \text{ bedeutet «ungleich»}$$

Vorzeichen beim Multiplizieren

+ mal + wird + - mal - wird +	bei zwei <i>gleichen Vorzeichen</i> stets ein positives Ergebnis
+ mal - wird - - mal + wird -	bei zwei <i>verschiedenen Vorzeichen</i> stets ein negatives Ergebnis

$$\begin{array}{ll} (+5) \cdot (+7) = +35 & \text{oder} \quad 5 \cdot 7 = 35 \\ (-7) \cdot (-8) = +56 & (-7) \cdot (-8) = 56 \\ (+9) \cdot (-3) = -27 & 9 \cdot (-3) = -27 \\ (-8) \cdot (+2) = -16 & (-8) \cdot 2 = -16 \end{array}$$

Enthält eine Aufgabe mehr als 2 Faktoren, so gilt folgende Regel:
Ist die Anzahl der Minuszeichen gerade, so wird das Ergebnis positiv.

$$\begin{array}{l} 4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-4) = \\ 4 \cdot (+6) \cdot (+8) = \underline{+192} \text{ (4 Minuszeichen)} \end{array}$$

Ist die Anzahl der Minuszeichen ungerade, so wird das Ergebnis negativ.

$$\begin{array}{l} 4 \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-2) \cdot (-4) = \\ 4 \cdot (-6) \cdot (+8) = \underline{-192} \text{ (3 Minuszeichen)} \end{array}$$

Weitere Beispiele:

$$\begin{array}{ll} 4a \cdot 5b = & (-6c) \cdot 3b = \\ 4 \cdot a \cdot 5 \cdot b = & (-6) \cdot c \cdot 3 \cdot b = \\ 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = \underline{20ab} & (-6) \cdot 3 \cdot c \cdot b = \underline{-18bc} \end{array}$$

Die Buchstaben werden gewöhnlich in alphabetischer Reihenfolge geschrieben.

$$\begin{array}{l} (-26uc) \cdot (-2ba) = \\ (-26) \cdot u \cdot c \cdot (-2) \cdot b \cdot a = \\ (-26) \cdot (-2) \cdot u \cdot c \cdot b \cdot a = \underline{52abcu} \end{array}$$

1.2.3 Dividieren (Teilen)

$$\text{Dividend} : \text{Divisor} = \text{Quotient} \quad \text{oder} \quad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$$

Man sollte statt der Doppelpunkte nach Möglichkeit den Bruchstrich verwenden.

Die rationelle Herstellung von Schreibmaschinen- und Drucktexten hat in der Praxis zu der Schreibweise mit Schrägstrich geführt (z.B. $1/4$, m/s^2 usw.). Bei technischen Berechnungen entstehen mit dieser Schreibweise jedoch leichter Fehler, da die Werte im Zähler und Nenner eines umfangreichen Bruches nicht mehr übersichtlich erkennbar sind.

Beim Dividieren gelten die gleichen Vorzeichenregeln wie beim Multiplizieren.

+				
durch		wird +		$\frac{+5}{+2} = +2,5$
+				
-				
durch		wird +		$\frac{-6}{-3} = +2$
-				
+				
durch		wird -		$\frac{+8}{-2} = -4$
-				
-				
durch		wird -		$\frac{-9}{+3} = -3$
+				

Durch Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor erhält man wieder den Dividenden. Die Aussage wird häufig als so genannte «Probe» angewendet.

$$\frac{10}{5} = 2 \quad \text{denn} \quad 5 \cdot 2 = 10$$

Die Division mit dem Divisor «Null» ergibt ein unbestimmtes Ergebnis (Quotient), denn die so genannte Probe ergibt nicht mehr den Dividenden.

$$\frac{6}{0} \rightarrow \infty \quad \text{aber} \quad \infty \cdot 0 = \text{unbestimmt,}$$

denn eine Zahl mit «null» multipliziert, müsste «null» bleiben.

1.2.4 Bruchrechnen



Ein Bruch ist das Verhältnis $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$, hier werden jedoch die Bezeichnungen $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ verwendet.

Ein Bruch kann erweitert und gekürzt werden:

erweitern = Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren.

kürzen = Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividieren.

$$\text{erweitern: } \frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{18}{15}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b \cdot c}{a \cdot c} = \frac{bc}{ac}$$

$$\text{kürzen: } \frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{ts}{vs} = \frac{ts : s}{vs : s} = \frac{t}{v}$$

1.2.4.1 Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit *gleichem Nenner* werden addiert, indem die Zähler addiert werden.

$$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{5}{26} + \frac{24}{26} = \frac{29}{26} = 1\frac{3}{26}$$

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{a} = \frac{7}{a}$$

$$\frac{6}{a} + \frac{2b}{a} = \frac{6+2b}{a}$$

Bei *ungleichen Nennern* muss durch Erweitern oder Kürzen ein Hauptnenner gebildet werden. Im einfachsten Fall ist er das Produkt aus den beiden Teilennern. Dieser «einfachste Fall» führt jedoch häufig zu unnötig großen Hauptennern.

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{3} =$$

$$\frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 4}{8 \cdot 3} =$$

$$\frac{15}{24} + \frac{32}{24} = \frac{47}{24}$$

$$\frac{4}{9} + 2 = \text{setze für 2 jetzt } \frac{2}{1} \text{ ein}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{1} = \text{Hauptnenner } 9 \cdot 1 = 9$$

$$\frac{4}{9} + \frac{2 \cdot 9}{1 \cdot 9} =$$

$$\frac{4}{9} + \frac{18}{9} = \frac{22}{9} = 2\frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{x} + \frac{3}{y} =$$

$$\frac{4 \cdot y}{x \cdot y} + \frac{x \cdot 3}{x \cdot y} =$$

$$\frac{4y+3x}{x \cdot y}$$

$$\frac{a}{b} + c =$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{1} =$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b \cdot c}{b} =$$

$$\frac{a+bc}{b}$$

Beim Subtrahieren gelten die gleichen Regeln wie beim Addieren.

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{7}{9} - \frac{2}{5} =$$

$$\frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{35}{45} - \frac{18}{45} = \frac{17}{45}$$

$$\frac{cd}{a} - \frac{2f}{b} - \frac{5c}{2} =$$

$$\frac{2cdb}{2ab} - \frac{2a2f}{2ab} - \frac{5cab}{2ab} =$$

$$\frac{2bcd}{2ab} - \frac{4af}{2ab} - \frac{5abc}{2ab} = \frac{2bcd - 4af - 5abc}{2ab}$$

Bei gleichen Nennern können sofort die Zähler voneinander subtrahiert werden.

Hauptnenner bilden (HN: $5 \cdot 9 = 45$), dann entsprechend erweitern.

(HN: $2ab$)

1.2.4.2 Multiplizieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{9} = \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 9} = \frac{20}{54} = \frac{10}{27}$$

Eine ganze Zahl denkt man sich als Bruch mit dem Nenner 1 (z.B. $6 = \frac{6}{1}$)

$$\frac{3}{9} \cdot 5 = \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{9 \cdot 1} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = 1 \frac{2}{3}$$

Brüche werden mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man nur den Zähler mit dieser Zahl multipliziert.

$$\frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{4}$$

Weitere Beispiele:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{\cancel{4} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cancel{4}} = \frac{96}{315}$$
$$\frac{5a}{b} \cdot \frac{7b}{9} \cdot 2d = \frac{5a \cdot \cancel{7b} \cdot 2d}{9 \cdot \cancel{b}} = \frac{70ad}{9}$$

1.2.4.3 Dividieren von Brüchen

Ein Bruch wird durch einen zweiten Bruch dividiert, indem man den ersten Bruch (Dividend) mit dem Kehrwert des zweiten Bruches (Divisor) multipliziert.

$$\frac{2}{8} : \frac{3}{7} = \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{8} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Eine ganze Zahl denkt man sich als Bruch mit dem Nenner 1. Es gilt auch:

Brüche werden durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner des Bruches mit dieser Zahl multipliziert.

$$\frac{2}{8} : 9 = \frac{2}{8} : \frac{9}{1} = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{8 \cdot 9} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

Gemischte Zahlen werden beim Dividieren und Multiplizieren in unechte Brüche verwandelt.

$$\frac{5}{9} : 2\frac{1}{4} = \frac{5}{9} : \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 9} = \frac{20}{81}$$

$$1\frac{2}{5} \cdot 2\frac{2}{9} = \frac{7}{5} \cdot \frac{20}{9} = \frac{7 \cdot 20}{5 \cdot 9} = \frac{140}{45} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$$

1.2.5 Dezimalbrüche und gemeine Brüche

Soll ein Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so ist der Dezimalbruch durch die entsprechende Zehnerzahl zu dividieren.

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad 0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimalbruch durch Division des Zählers durch den Nenner verwandelt.

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4 \qquad \frac{4}{7} = 4 : 7 = 0,5714\dots$$

1.2.6 Auf- und Abrunden von Ergebnissen

Im Zuge der Anwendung des Taschenrechners erscheint das Ergebnis häufig bis zu 8 Ziffern genau (Ziffernumfang der Rechneranzeige). In der technischen Praxis wird die sinnvolle Genauigkeit der Rechenoperation durch die Exaktheit der vorgegebenen Zahlen (z.B. Messung von Strom und Spannung) oder die Möglichkeit der Beschaffung von Bauteilen (z.B. Widerstände) bestimmt.

Außerdem sollten in Zeichnungen die Maße nie genauer angegeben als bei der Fertigung erwünscht werden, weil sonst unnötig hohe Fertigungskosten entstehen.

Somit sollte das Endergebnis einer Aufgabe möglichst nur auf maximal 3 Ziffern genau angegeben werden. Aus diesem Grund wird die 4. Ziffer auf- oder abgerundet. Dazu gilt:

Ist die 4. Ziffer eine 1; 2; 3 oder 4, so kann sie fortfallen.

Ist die 4. Ziffer eine 5; 6; 7; 8 oder 9, so erhöht sich die 3. Ziffer um einen Wert.

abrunden:

$$\begin{aligned} 0,5714 &\approx 0,571 \\ 47,63 &\approx 47,6 \\ 127,249 &\approx 127 \\ 2663 &\approx 2660 \end{aligned}$$

aufunden:

$$\begin{aligned} 0,04276 &\approx 0,0428 \\ 126,8 &\approx 127 \\ 2837,5 &\approx 2840 \\ 3,997 &\approx 4,00 \end{aligned}$$

Bei der Eingabe in den Rechner der Kreiszahl π , den Winkelfunktionen sin, cos, tan, einer Wurzel usw. sollten stets die entsprechenden Funktionstasten verwendet werden. Damit entfallen langwierige Zahlenkombinationen bei gleichzeitiger Exaktheit.

richtig: Betätigen der Taste « π »

unsinnig: Eingabe der Zahl 3,1415926

Beispiel: Der Durchmesser einer Welle wurde mit 25,9 mm mittels Messschieber ermittelt. Wie groß ist der Umfang der Welle?

Umfang $U = d \cdot \pi = 25,9 \text{ mm} \cdot \pi = 81,367\,248 \text{ mm}$ (Anzeige des Rechners)

Da der Wellendurchmesser nur mit einer Genauigkeit von 3 Ziffern ermittelt werden konnte, ist das Ergebnis entsprechend zu runden.

$$U = 81,367\,248 \text{ mm} = \underline{81.4 \text{ mm}}$$

1.3 Dreisatzrechnung – Prozentrechnung

1.3.1 Dreisatzrechnung (Schlussrechnung)

Sollen zwei voneinander abhängige Größen umgerechnet werden, kann das in drei Sätzen geschehen. Dabei unterscheidet man Aufgaben, in denen die Größen proportional zueinander stehen, und Aufgaben mit umgekehrter Proportionalität.

1.3.1.1 Proportionaler Dreisatz

4 Schalter kosten 12 €. Wie viel kosten 10 Schalter?

Frage:	10 Schalter kosten?	€
1. Satz (Es ist bekannt):	4 Schalter kosten	12 €
2. Satz (Beginn d. Rechnung):	1 Schalter kostet	$\frac{12}{4}$ €
3. Satz (Ergebnis):	10 Schalter kosten	$\frac{12 \cdot 10}{4}$ € = <u>30 €</u>

Um ein unnötiges Schreiben zu vermeiden und trotzdem die Aufgabe übersichtlich zu gestalten, sei folgende Schreibweise empfohlen:

10 Schalter	→	? €
4 Schalter	→	12 €
1 Schalter	→	$\frac{12}{4}$ €
10 Schalter	→	$\frac{12 \cdot 10}{4}$ € = <u>30 €</u>

In diesem Beispiel wachsen Preis und Stückzahl im gleichen Verhältnis (proportional).

1.3.1.2 Umgekehrt proportionaler Dreisatz

Beispiel 1: 15 Gesellen benötigen für eine Arbeit 4 Tage. Wie lange müssen an der gleichen Aufgabe 3 Gesellen tätig sein?

$$\begin{array}{l} \text{Frage:} \quad \underline{\quad\quad\quad} \quad 3 \text{ Gesellen benötigen } ? \text{ Tage} \\ \text{1. Satz (Es ist bekannt):} \quad 15 \text{ Gesellen benötigen } 4 \text{ Tage} \\ \text{2. Satz (Beginn d. Rechnung):} \quad 1 \text{ Geselle benötigt } 4 \cdot 15 \text{ Tage} \\ \text{3. Satz (Ergebnis):} \quad 3 \text{ Gesellen benötigen } \frac{4 \cdot 15}{3} = \underline{\underline{20 \text{ Tage}}} \end{array}$$

Hier hat das Sinken der Gesellenzahl ein Ansteigen der Tageszahl zur Folge. Daher spricht man von umgekehrter Proportionalität.

Beispiel 2: Ein Autofahrer benötigt für eine bestimmte Strecke 6 Stunden bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h. Wie schnell muss er fahren, damit er in 4 Stunden am Ziel anlangt?

$$\begin{array}{l} \text{Frage:} \quad \underline{4 \text{ Stunden erfordern } ? \text{ km/h}} \\ \text{Bekannt:} \quad 6 \text{ Stunden erfordern } 80 \text{ km/h} \\ \quad \quad \quad 1 \text{ Stunde erfordert } 6 \cdot 80 \text{ km/h} \\ \text{Ergebnis:} \quad 4 \text{ Stunden erfordern } \frac{6 \cdot 80 \text{ km}}{4 \text{ h}} = \underline{\underline{120 \text{ km/h}}} \end{array}$$

Man setze die zu berechnende Größe stets an das Ende des Fragesatzes!

Um den Aufbau eines Dreisatzes zu erleichtern, sollte man stets den Fragesatz an den Anfang einer Aufgabe stellen.

richtig: 4 Stunden erfordern ? km/h

falsch: ? km/h sind bei 4 Stunden erforderlich?

1.3.1.3 Doppelter Dreisatz

Beispiel 1: 4 Gesellen verlegen in 5 Tagen 600 m Leitungen.
Wieviel Meter werden von 2 Gesellen in 3 Tagen verlegt?

	Frage: 2 Gesellen → 3 Tagen → ?	
	Bekannt: 4 Gesellen → 5 Tagen → 600 m	
1. Dreisatz	{	1 Geselle → 5 Tagen → $\frac{600}{4}$ m
		2 Gesellen → 5 Tagen → $\frac{600 \cdot 2}{4}$ m
2. Dreisatz	{	2 Gesellen → 1 Tag → $\frac{600 \cdot 2}{4 \cdot 5}$ m
		2 Gesellen → 3 Tagen → $\frac{600 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5}$ m
	Ergebnis: = 180 m	

In dem 1. Beispiel handelt es sich zweimal um einen proportionalen Dreisatz. Das folgende Beispiel 2 ist eine gemischte Aufgabe.

Beispiel 2: 6 Automaten fertigen in 10 Stunden 9000 Wicklungen. Wie viele Stunden benötigen 4 Automaten für 4500 Wicklungen?

	Frage: 4 Automaten → 4500 Wickl. → ? Stunden	
	Bekannt: 6 Automaten → 9000 Wickl. → 10 Stunden	
1. umgekehrt proportionaler Dreisatz	{	1 Automat → 9000 Wickl. → 10 · 6 Stunden
		4 Automaten → 9000 Wickl. → $\frac{10 \cdot 6}{4}$ Stunden
2. proportionaler Dreisatz	{	4 Automaten → 1 Wickl. → $\frac{10 \cdot 6}{4 \cdot 9000}$ Stunden
		4 Automaten → 4500 Wickl. → $\frac{10 \cdot 6 \cdot 4500}{4 \cdot 9000}$ Stunden
	Ergebnis: = <u>7,5 Stunden</u>	

1.3.2 Prozentrechnung

Einen Anwendungsfall für die Dreisatzrechnung bietet die Prozentrechnung.
Prozent heißt: «Für oder von hundert.»

$$1 \text{ Prozent} = 1\% = 1 \text{ Teil von hundert} = \frac{1}{100}$$

$$37 \text{ Prozent} = 37\% = 37 \text{ Teile von hundert} = \frac{37}{100}$$

In der Prozentrechnung kennt man folgende drei Größen:

Prozentsatz **Grundwert** **Prozentwert**
30% von 200 € sind 60 €

Der *Grundwert* gibt das Ganze an, von dem ein Teil berechnet werden soll. Er ist immer 100%

$\left(\frac{100}{100}\right)$ des Ganzen.

Der *Prozentsatz* gibt an, welcher Bruchteil genommen werden soll.

Der *Prozentwert* gibt an, welchen Wert der Bruchteil hat.

Zwischen diesen 3 Größen besteht folgender Zusammenhang:

$$\text{Prozentwert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz}}{100}$$

Diese Formel sollte man sich jedoch nur dann einprägen, wenn sie häufig angewendet werden muss. Einfacher, wenn auch mit etwas mehr Schreibarbeit verbunden, ist die Berechnung mit Hilfe der Dreisatzrechnung.

Beispiel 1: (gesucht wird der Prozentwert):

Ein Kühlschrank kostet 320 € und wird um 30% billiger verkauft. Wie groß ist der Preisnachlass in €?

$$\begin{array}{l} \text{Frage: } 30\% \text{ von } 320 \text{ €} \hat{=} ? \text{ €} \\ \text{Bekannt: } 100\% \hat{=} 320 \text{ €} \\ \quad 1\% \hat{=} 3,20 \text{ €} \\ \quad 30\% \hat{=} 3,20 \text{ €} \cdot 30 = \underline{96 \text{ €}} \end{array}$$

Ergebnis: Der Preisnachlass beträgt 96 €.

Beispiel 2: (gesucht wird der Prozentsatz):

Der Spannungsfall auf der Leitung beträgt 12 Volt bei einer Nennspannung von 200 Volt. Wie viel Prozent Verlust treten auf?

$$\begin{array}{l} \underline{12 \text{ Volt sind } ?\% \text{ von } 200 \text{ V}} \\ 200 \text{ V} \hat{=} 100\% \\ 1 \text{ V} \hat{=} \frac{100}{200}\% \\ 12 \text{ V} \hat{=} \frac{100 \cdot 12}{200}\% = \underline{6\%} \end{array}$$